TEORI BILANGAN

DINA AMALYA LAPELE, M.PD.

TEORI BILANGAN

DINA AMALYA LAPELE, M.PD.

Penerbit widina

TEORI BILANGAN

Penulis:
Dina Amalya Lapele

Desain Cover:
Septian Maulana

Tata Letak:
Handarini Rohana

Editor:
Nani Sukartini Sangkala, M.Si.

ISBN:
978-623-459-473-7

Cetakan Pertama:
Mei, 2023

Hak Cipta 2023, Pada Penulis

Hak Cipta Dilindungi Oleh Undang-Undang

Copyright © 2023
by Penerbit Widina Bhakti Persada Bandung
All Right Reserved

Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Penerbit.

PENERBIT:
WIDINA BHAKTI PERSADA BANDUNG
(Grup CV. Widina Media Utama)
Komplek Puri Melia Asri Blok C3 No. 17 Desa Bojong Emas
Kec. Solokan Jeruk Kabupaten Bandung, Provinsi Jawa Barat

Anggota IKAPI No. 360/JBA/2020
Website: www.penerbitwidina.com
Instagram: @penerbitwidina
Telpon (022) 87355370

KATA PENGANTAR

Buku ini merupakan buku ajar mata kuliah Teori Bilangan. Tujuan penulis dalam menerbitkan buku ini yaitu untuk mempermudah mahasiswa dalam memahami teori bilangan. Buku ini ditulis dengan menggunakan penjelasan yang sederhana sehingga mudah dipahami oleh mahasiswa semester awal hingga mahasiswa semester akhir. Selain itu, penulis juga menyajikan berbagai contoh pada setiap penjelasannya sehingga membantu dalam memahami materi.

Adapun materi yang dibahas pada buku ini disesuaikan dengan materi yang dipelajari pada mata kuliah Teori Bilangan saja. Buku ini diharapkan dapat membantu mahasiswa maupun guru dalam memahami Teori Bilangan.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan hingga penerbitan buku ini. Saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan buku ini kedepan.

Mei, 2023

Dina Amalya Lapele, M.Pd.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR ..... **iii**
DAFTAR ISI ..... **iv**
BAB 1 PENGANTAR BILANGAN **1**
A. Bilangan dan Angka 1
B. Jenis-Jenis Bilangan 1
C. Konsep Bilangan yang Terhitung dan Terhingga 4
D. Latihan 5
BAB 2 SIFAT DASAR BILANGAN BULAT PADA OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN **7**
A. Penjumlahan Bilangan Bulat 7
B. Perkalian Bilangan Bulat 8
C. Menyederhanakan Persamaan dengan Menggunakan Sifat Dasar Bilangan Bulat pada Operasi Penjumlahan dan Perkalian 10
D. Latihan 11
BAB 3 ATURAN-ATURAN PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN BILANGAN BULAT **13**
A. Hukum Kanselasi Penjumlahan 13
B. Hukum Kanselasi Perkalian 13
C. Definisi 1 14
D. Sifat Trikotomi 14
E. Teorema 1 15
F. Teorema 2 15
G. Latihan 16
BAB 4 KETERBAGIAN BILANGAN BULAT **17**
A. Definisi 2 (Keterbagian Bilangan Bulat) 17
B. Teorema 3 18
C. Teorema 4 18
D. Teorema 5 19
E. Teorema 6 20
F. Teorema 7 21
G. Latihan 22

BAB 5 CIRI KETERBAGIAN BILANGAN 2 SAMPAI 10 23
A. Bilangan Habis Dibagi 2 23
B. Bilangan Habis Dibagi 3 23
C. Bilangan Habis Dibagi 4 24
D. Bilangan Habis Dibagi 5 24
E. Bilangan Habis Dibagi 6 24
F. Bilangan Habis Dibagi 7 25
G. Bilangan Habis Dibagi 8 25
H. Bilangan Habis Dibagi 9 26
I. Bilangan Habis Dibagi 10 26
J. Latihan 26
BAB 6 CIRI KETERBAGIAN BILANGAN 11, 25, 50, 100 27
A. Bilangan Habis Dibagi 11 27
B. Bilangan Habis Dibagi 25 27
C. Bilangan Habis Dibagi 50 28
D. Bilangan Habis Dibagi 100 28
E. Latihan 28
BAB 7 FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB) 29
A. Definisi 3 (Faktor Persekutuan) 30
B. Definisi 4 (Definisi Faktor Persekutuan Terbesar) 30
C. Definisi 5 (Penulisan FPB) 30
D. Teorema 8 31
E. Teorema 9 31
F. Teorema 10: Algoritma Euclides 32
G. Latihan 32
BAB 8 KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL (KPK) 33
A. Definisi 6 (Kelipatan Persekutuan Terkecil) 33
B. Teorema 11 34
C. Teorema 12 34
D. Latihan 35
BAB 9 KONGRUENSI 37
A. Definisi 7 (Kongruensi) 37
B. Teorema 13 38
C. Teorema 14 38
D. Teorema 15 41

E. Teorema 16 43
F. Teorema 17 46
G. Latihan 48
BAB 10 RESIDU 49
A. Definisi 8 (Sistem Residu Lengkap) 49
B. Definisi 9 (Sistem Residu Tereduksi) 50
C. Teorema 18 51
D. Latihan 52
BAB 11 TEOREMA EULER 53
A. Definisi 10 (Fungsi Euler) 53
B. Teorema 19: Teorema Euler 56
C. Latihan 58
DAFTAR PUSTAKA 59
PROFIL PENULIS 60

BAB

1

PENGANTAR BILANGAN

A. BILANGAN DAN ANGKA

Pada umumnya sebagian besar orang menganggap bilangan dan angka sama saja. Tetapi pada hakikatnya, bilangan dan angka adalah hal berbeda. **Bilangan** adalah suatu konsep matematika yang digunakan dalam pencacahan dan pengukuran. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai **angka** atau lambang bilangan. Secara lebih sederhana dapat kita kita katakan bahwa angka hanya berupa tampilan atau bentuk, sementara bilangan adalah nilainya.

Misalnya, kita dapat menulis angka lima dengan bentuk **5**. Sementara itu dalam angka Romawi kita dapat menulis lima dengan bentuk **V**, dan dalam angka Arab dapat kita tulis dengan bentuk ٥. Suatu bilangan dapat dinyatakan dalam berbagai angka.

B. JENIS-JENIS BILANGAN

Sejak menginjak jenjang SMP dan SMA kita telah mengenal beberapa bilangan, misalnya bilangan bulat, bilangan riil, bilangan rasional, bilangan irasional, dan sebagainya. Keseluruhan jenis bilangan tersebut memiliki keterkaitan. Bilangan yang cakupannya paling luas adalah bilangan kompleks atau yang biasa disimbolkan dengan $\mathbb{C}$. Untuk lebih memahami susunan bilangan perhatikan bagan berikut!.

BAB

2

SIFAT DASAR BILANGAN BULAT PADA OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN

A. PENJUMLAHAN BILANGAN BULAT

Misalkan a, b, dan c masing-masing adalah bilangan bulat maka berlaku sifat berikut:

Ketertutupan	:	$a + b$ merupakan bilangan bulat
Komutatif	:	$a + b = b + a$
Assosiatif	:	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Identitas	:	$a + 0 = a$ dan $0 + a = a$
Invers	:	$a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$

Sifat ketertutupan pada penjumlahan artinya bilangan bulat dijumlahkan dengan bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat. Hal ini sudah tentu benar. Tidak mungkin ada penjumlahan dua bilangan bulat yang hasilnya bukan bilangan bulat.

Sifat komutatif seringkali disebut juga dengan sifat pertukaran. Artinya, meskipun posisinya ditukar tidak akan berpengaruh terhadap hasil penjumlahan. Contoh penggunaan sifat komutatif yaitu $2 + 3 = 3 + 2$ yaitu menghasilkan 5. Contoh lain, $(-1) + 4 = 4 + (-1)$ yaitu menghasilkan 3.

BAB

3

ATURAN-ATURAN PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN BILANGAN BULAT

A. HUKUM KANSELASI PENJUMLAHAN

Jika $p, q, r \in \mathbb{Z}, r \neq 0$, dan $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$, maka $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$.

Bukti:

Langkah	Alasan
1) $p, q, r \in \mathbb{Z}$	Diketahui
2) $r \neq 0$	Diketahui
3) $p + r = q + r$	Diketahui
4) $(p + r) - r = (q + r) - r$	Penjumlahan langkah (3) dengan $(-r)$
5) $p + (r - r) = q + (r - r)$	Assosiatif penjumlahan
6) $p + 0 = q + 0$	Invers penjumlahan
7) $p = q$	Identitas penjumlahan

B. HUKUM KANSELASI PERKALIAN

Jika $p, q, r \in \mathbb{Z}, r \neq 0$, dan $\boldsymbol{pr} = \boldsymbol{qr}$, maka $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$.

BAB

4

KETERBAGIAN BILANGAN BULAT

A. DEFINISI 2 (KETERBAGIAN BILANGAN BULAT)

Suatu bilangan bulat q habis dibagi oleh suatu bilangan bulat $p \neq 0$ jika ada suatu bilangan bulat x sehingga $\boldsymbol{q = px}$.

Notasi:

$p \mid q$ dibaca : ○ q habis dibagi p ○ p membagi habis q ○ p faktor dari q ○ q kelipatan dari p	$p \nmid q$ dibaca : ○ q tidak habis dibagi p ○ p tidak membagi habis q ○ p bukan faktor dari q ○ q bukan kelipatan dari p

Contoh:

1) $4 \mid 24$ sebab ada bilangan bulat 6 sehingga $24 = 4 \cdot 6$
2) $8 \nmid 9$ sebab tidak ada bilangan bulat x sehingga $9 = 8 \cdot x$
3) $5 \mid -15$ sebab ada bilangan bulat -3 sehingga $-15 = 5 \cdot (-3)$

Beberapa sifat sederhana keterbagian adalah:

BAB

5

CIRI KETERBAGIAN BILANGAN 2 SAMPAI 10

A. BILANGAN HABIS DIBAGI 2

Suatu bilangan habis dibagi 2 jika digit terakhirnya adalah 0 atau bilangan genap.

Contoh:

- 60 (digit terakhirnya 0)
- -102 (digit terakhirnya 2 yaitu bilangan genap)
- 7358 (digit terakhirnya 8 yaitu bilangan genap)

B. BILANGAN HABIS DIBAGI 3

Suatu bilangan habis dibagi 3 jika jumlah angka-angkanya habis dibagi 3.

Contoh:

- 5.265 habis dibagi 3 karena $5 + 2 + 6 + 5 = 15$, dimana 15 habis dibagi 3.
- 1839 habis dibagi 3 karena $1 + 8 + 3 + 9 = 21$, dimana 21 habis dibagi 3.

BAB

6

CIRI KETERBAGIAN BILANGAN 11, 25, 50, 100

A. BILANGAN HABIS DIBAGI 11

Suatu bilangan habis dibagi 11, jika selisih dari jumlah angka-angka di tempat ganjil dan jumlah angka-angka di tempat genap adalah 0 atau 11.

Contoh:

- 693 habis dibagi 11 karena $(6 + 3) - 9 = 0$.
- 9.680 habis dibagi 11 karena $(9 + 8) - (6 + 0) = 11$.
- -30104030 habis dibagi 11 karena $-(3 + 1 + 4 + 3) - (0 + 0 + 0 + 0) = -(11 - 0) = -11$.

B. BILANGAN HABIS DIBAGI 25

Suatu bilangan habis dibagi 25, jika 2 angka terakhir adalah 00 atau 25 atau 50 atau 75.

BAB

7

FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB)

Jika A adalah himpunan semua faktor dari 8 dan B adalah himpunan semua faktor dari 12 maka:

$A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
$B = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$C = A \cap B = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$

Anggota C yang terbesar adalah 4. Dengan demikian 4 disebut faktor persekutuan terbesar dari $a = 8$ dan $b = 12$.

Jika $a = -8$ dan $b = 12$ maka:
$A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
$B = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$C = A \cap B = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$

Faktor persekutuan terbesar dari $a = -8$ dan $b = 12$ adalah 4.

Hal tersebut ternyata juga berlaku untuk $a = 8$ dan $b = -12$. Begitupun juga berlaku untuk $a = -8$ dan $b = -12$. Jadi, meskipun kombinasi a dan b bernilai positif maupun negatif, faktornya tetap sama karena faktor dapat berupa bilangan negatif dan positif. Perhatikan bahwa faktor persekutuan boleh bernilai positif atau negatif, tetapi **Faktor Persekutuan Terbesar** tentulah bernilai positif.

BAB

8

KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL (KPK)

Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) diperoleh dengan terlebih dahulu mendaftarkan kelipatan dari kedua bilangan. Kelipatan persekutuan dipilih dengan menentukan bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan pada keduanya. Selanjutnya pilihlah kelipatan persekutuan yang terkecil. Contohnya, kita akan mencari KPK dari 4 dan 5. Kelipatan dari 4 yaitu $4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,\cdots$. Kelipatan dari 5 yaitu $5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,\cdots$. Kelipatan persekutuan dari 4 dan 5 yaitu 20, 40, dan seterusnya. Maka Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari 4 dan 5 yaitu 20.

A. DEFINISI 6 (KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL)

Jika $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$, maka:

- m disebut kelipatan persekutuan dari a dan b jika $a|m$ dan $b|m$.
- m disebut KPK dari a dan b jika m adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $a|m$ dan $b|m$.
- m adalah KPK dari a dan b, ditulis $m = [a, b]$.

BAB

9

KONGRUENSI

Konsep dasar kongruensi sebenarnya telah kita pelajari secara tidak langsung sejak SD. Perhatikan ilustrasi berikut!. Misalnya jam di HP menunjukkan pukul 17.00. Tentu kita akan memahami bahwa itu adalah jam 3 sore. Hal tersebut dikarenakan setelah jam 12 siang maka perhitungan kembali lagi ke 1, meskipun dengan penulisan yang berbeda. Dalam bentuk kongruensi dapat ditulis dengan $17 \equiv 5\ (mod\ 12)$.

A. DEFINISI 7 (KONGRUENSI)

Jika p, q, m adalah bilangan bulat maka p disebut kongruen dengan q modulo m jika dan hanya jika m membagi $(p - q)$.
Ditulis:
$p \equiv q\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $m \mid p - q$

Contoh:

- $26 \equiv 1\ (mod\ 5)$ karena $5|26 - 1$ atau $5|25$.
- $10 \equiv 4\ (mod\ 3)$ karena $3|10 - 4$ atau $3|6$.
- $23 \equiv -1 (mod\ 12)$ karena $12|23 - (-1)$ atau $12|24$.
- $31 \not\equiv 5\ (mod\ 6)$ karena $6 \nmid 31 - 5$ atau $6 \nmid 26$.

BAB

10

RESIDU

A. DEFINISI 8 (SISTEM RESIDU LENGKAP)

Suatu himpunan $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ disebut suatu sistem residu lengkap modulo m jika dan hanya jika untuk setiap y dengan $0 \leq y < m$ ada satu dan hanya satu x_i dengan $1 \leq i < m$ sedemikian hingga $y \equiv x_i (mod\ m)$ atau $x_i \equiv y (mod\ m)$.

Penjelasan:

- Indeks dari x yang terakhir adalah m. Hal ini menunjukkan bahwa banyaknya unsur dalam suatu sistem residu lengkap modulo m adalah m.
- Jika ada suatu himpunan yang banyaknya unsur kurang dari m atau lebih dari m, maka himpunan itu bukan merupakan sistem residu lengkap modulo m.
- Karena pasangan-pasangan kongruensi antara y dan x_i adalah tunggal, maka tidak ada y yang kongruen dengan dua unsur x yang berbeda.

Contoh:

1. Himpunan $B = \{5,6,7,8\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 4.
   Karena:

BAB

11

TEOREMA EULER

A. DEFINISI 10 (FUNGSI EULER)

Misalkan m adalah suatu bilangan positif. Banyaknya residu di dalam suatu sistem residu tereduksi modulo m disebut fungsi $\phi - Euler$ dari m dan dinyatakan dengan $\phi(m)$.

Contoh:

a) $\phi(2) = 1$ diperoleh dari unsur 1
b) $\phi(3) = 2$ diperoleh dari unsur 1 dan 2
c) $\phi(4) = 2$ diperoleh dari unsur 1 dan 3
d) $\phi(5) = 4$ diperoleh dari unsur 1,2,3,4
e) $\phi(6) = 2$ diperoleh dari unsur 1 dan 5
f) $\phi(7) = 6$ diperoleh dari unsur 1,2,3,4,5,6
g) $\phi(8) = 4$ diperoleh dari unsur 1,3,5,7
h) $\phi(p) = p - 1$ jika p adalah suatu bilangan prima

Penjelasan:

Sebelum memahami penjelasan dari contoh di atas, ingat terlebih dahulu materi sebelumnya bahwa residu diperoleh dari menghilangkan unsur-unsur yang tidak relatif prima. Unsur yang tidak relatif prima yaitu yang memiliki FPB bukan 1. Dengan demikian, residu diperoleh dari menghilangkan unsur-unsur yang memiliki FPB bukan 1, kemudian unsur-unsur tersisa yang tidak dihilangkan itulah yang akan disebut residu.

DAFTAR PUSTAKA

Burdon, D. M. 1980. Elementery number Theory. Boston: Allyn and Bacon, inc.

Handayani, R. & Yulina. (2020). Teori Bilangan. Lampung Utara: Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Stewart, B. M. 1952. Theory of Numbers, New York: The Macmillan Company.

Sukirman. 2006. Pengantar Teori Bilangan. Yogyakarta : Hanggar Kreator.

PROFIL PENULIS

Dina Amalya Lapele, M.Pd.

Penulis merupakan dosen Pendidikan Matematika Institut Agama Islam Negeri Ambon. Penulis yang lahir di Ambon pada 14 Maret 1995 ini telah memulai kariernya sebagai dosen sejak tahun 2019 hingga sekarang. Penulis menyelesaikan studi S1 di Universitas Muhammadiyah Malang pada tahun 2016 dan menyelesaikan S2 di universitas yang sama pada tahun 2018. Penulis menekuni program studi Pendidikan Matematika sejak S1 hingga S2. Hingga saat ini penulis telah menerbitkan beberapa artikel penelitian yang membahas tentang pendidikan secara umum dan juga pendidikan matematika.

TEORI BILANGAN

Sebagian besar aktivitas kehidupan kita sehari-hari tak lepas dari bilangan. Kita sendiri bahkan mungkin secara tidak sadar seringkali memecahkan berbagai masalah sehari-hari dengan bantuan bilangan dan operasinya. Hal tersebut menjadikan bilangan menjadi hal mendasar dan penting untuk kita pelajari. Buku yang berjudul "Teori Bilangan" ini membahas berbagai jenis bilangan serta operasinya. Buku ini disusun berdasarkan kebutuhan mahasiswa dalam mengampu mata kuliah Teori Bilangan.

Setelah mempelajari buku ini mahasiswa diharapkan dapat mengoperasikan berbagai jenis bilangan dan memecahkan berbagai masalah dengan menggunakan bilangan. Keunggulan dari buku ini adalah menyajikan penjelasan dengan bahasa yang sangat mudah dipahami. Selain itu, dalam setiap materi yang dibahas juga disajikan berbagai contoh soal yang semakin membantu kita memahami materi.

ISBN 978-623-459-473-7

9 786234 594737

Penerbit widina
www.penerbitwidina.com